PART3　ベクトルの成分と大きさ，分解

3 $\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ。また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

(2) $\vec{c}=(5,\ 4)$ を，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

Point Pickup

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

第７講　PART3　確認問題

$\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

1　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。

(1)　$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{10}$ となるような k の値を求めよ。

$k=$ [アイ]，[ウエ]

ただし，[アイ] $<$ [ウエ] とする。

(2)　$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

$\sqrt{}$[オ]

2　$\vec{c}=(11,\ 2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表したとき，実数 s，t の値を求めよ。

$s=$ [カ]，$t=$ [キク]

PART3　ベクトルの成分と大きさ，分解

3　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ。また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

(2)　$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

(1)　$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(1,\ -1)+k(3,\ 2)=(3k+1,\ 2k-1)$

$|\vec{p}|^2=(3k+1)^2+(2k-1)^2=13k^2+2k+2$

$|\vec{p}|=\sqrt{2}$ のとき　$|\vec{p}|^2=2$

よって　$13k^2+2k+2=2$　　$13k^2+2k=0$　　$k(13k+2)=0$

したがって　$k=0,\ -\dfrac{2}{13}$

また，$|\vec{p}|^2=13\left(k+\dfrac{1}{13}\right)^2+\dfrac{25}{13}$　であるから

$k=-\dfrac{1}{13}$ のとき $|\vec{p}|^2$ は最小値 $\dfrac{25}{13}$ をとる。

$|\vec{p}|\geqq 0$ より，このとき $|\vec{p}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{p}|$ は $k=-\dfrac{1}{13}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{25}{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ をとる。

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より　$(5,\ 4)=s(1,\ -1)+t(3,\ 2)$

つまり　$(5,\ 4)=(s+3t,\ -s+2t)$

よって　$s+3t=5$，$-s+2t=4$ より　$s=-\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{9}{5}$

したがって　$\vec{c}=-\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{5}\vec{b}$

第 7 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-3，ウエ：-1，オ：5

[解説]

$$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(4,\ 3)+k(1,\ 2)$$
$$=(k+4,\ 2k+3)$$
$$|\vec{p}|^2=(k+4)^2+(2k+3)^2 \quad \text{[A]}$$
$$=5k^2+20k+25$$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

(1)　$|\vec{p}|=\sqrt{10}$ のとき　$|\vec{p}|^2=10$

よって

$$5k^2+20k+25=10$$
$$k^2+4k+3=0$$
$$(k+3)(k+1)=0$$

したがって　$\boldsymbol{k=-3,\ -1}$

(2)　$|\vec{p}|^2=5(k+2)^2+5$ であるから，

$k=-2$ のとき，$|\vec{p}|^2$ は最小値 5 をとる。

$|\vec{p}|\geqq 0$ より，このとき $|\vec{p}|$ も最小となる。

したがって，$k=-2$ のとき，$|\vec{p}|$ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ をとる。

2

[正解] カ：4，キク：-5

[解説]

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より

$$(11,\ 2)=s(4,\ 3)+t(1,\ 2)$$

すなわち

$$(11,\ 2)=(4s+t,\ 3s+2t)$$

よって　$4s+t=11,\ 3s+2t=2$ [B]

ゆえに　$\boldsymbol{s=4,\ t=-5}$

このとき　$\vec{c}=4\vec{a}-5\vec{b}$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$